Содержание

1 Введение

Обширная область экономической теории посвящена изучению проблемы сравнения результатов независимых действий экономических агентов с результатами их скоординированных решений. Зачастую координация улучшает эффективность, учитывая эффекты внешних влияний среди агентов, но она может и снижать эффективность за счет неоптимального распределения ресурсов.

Подобный подход может быть применен при рассмотрении проблемы фискального федерализма. Какая степень самостоятельности при определении налоговой политики должна быть предоставлена субъектам федерации? Дилемма "самостоятельность или скоординированность" в этой ситуации не имеет однозначного решения. Перед федеральным законодателем встает вопрос: предоставлять ли возможность определения налоговой политики региональным властям так, чтобы каждый регион самостоятельно принимал решение об уровне налогов и величине расходов на предоставление общественных благ, или централизовать этот процесс и проводить единую фискальную политику на федеральном уровне? В каком случае эффективность будет выше?

Бюджетные системы большинства современных стран характеризуются той или иной степенью децентрализации полномочий по предоставлению общественных благ и полномочий в области налогообложения. При этом децентрализация может способствовать эффективности предоставления общественных благ, но может и порождать ряд издержек. Выбор уровня налогообложения и объема расходов на общественные блага осуществляется региональными властями на основе определенного компромисса. С одной стороны, имеется стремление к росту бюджетных доходов, позволяющему увеличить объем предоставления общественных благ и тем самым повысить уровень поддержки власти со стороны населения. С другой стороны, увеличение налоговой нагрузки на предприятия региона становится причиной "бегства капитала" в другие регионы и в долгосрочном периоде может негативно воздействовать на экономическую активность и, соответственно, на уровень бюджетных доходов.

Налоговая система РФ находится на этапе становления. Это мотивирует изучение проблемы федерализма. В представленном в работе анализе модели, предложенной в незавершенной работе С. Г. Коковина и Е. В. Желободько [**?**], исследуется взаимодействие двух регионов, конкурирующих за налоговую базу. В регионах имеется некоторый агрегированный товар, производство которого облагается налогами. Региональные власти выбирают величины налоговых ставок и объемы финансирования общественных благ. Последние в общем случае могут быть меньше, чем совокупные объемы налоговых сборов. Разница составляет собственное потребление региональных властей. В этом выражается их "неальтруистичность", т. е. мы предполагаем, что не все собранные налоги возвращаются "назад" в виде предоставления общественных благ, а часть из них оказывается потраченной впустую, не принося населению региона никакой пользы. Формально неальтруистичность реализована как различие целей федерального законодателя — "социального плановика", представляющего интересы домохозяйств и бизнесменов, и региональных целей.

Бизнес предполагается частично мобильным и на увеличение налоговой нагрузки в регионе может среагировать "переливом" в другой регион, инвестиционный климат в котором мягче. В результате, региональные власти конкурируют за налогоплательщиков, пытаясь преследовать несколько целей: интересы бизнеса, интересы домохозяйств, и собственные интересы.

Проблема делегирования полномочий отражается в нескольких концепциях решения возникающей игры. Равновесие с налоговой конкуренцией представляет из себя стандартное равновесие Нэша в игре регионов. Далее рассматривается концепция скоординированного поведения регионов. В этом случае региональные власти, принимая решение, кооперируются и делают свой выбор в рамках общих бюджетных ограничений с целью максимизации совокупных выгод. Эти концепции соответствуют полной передаче всех полномочий по налогообложению на региональный уровень. Другой подход заключается в моделировании поведения федерального законодателя как лидера по Штакельбергу, а регионов — как ведомых. В этой ситуации федеральные власти устанавливают уровень налогов, ориентируясь на то, что региональные власти будут расходовать собранные средства в соответствии со своими, возможно, неальтруистическими интересами. Этот вариант поведения близок к ситуации частичного делегирования полномочий на региональный уровень, при которой местным властям предоставляется возможность самостоятельно решать, каким образом распределять доходы федерального бюджета между своими интересами. Мы собираемся исследовать проблему с точки зрения достижимости целей федерального законодателя, считая его наиболее “честным” представителем интересов населения.

В первой части работы совершается небольшой экскурс в историю исследования поставленного вопроса и проводится сравнение существующих подходов с представленным в работе.

Вторая часть формально описывает модель, приводит строгие формулировки основных понятий и концепций, используемых в анализе.

В третьей части рассматриваются некоторые важные свойства решений задач, сформулированных во второй главе.

Четвертая часть работы изучает условия, при которых в ситуациях конкурентного равновесия и координации регионов уровень налогов является в некотором роде недостаточным. Осуществляется попытка построения некоторых измеримых величин (индексов), на основании которых можно будет диагностировать ситуацию, в которой “недообложение” налогами действительно будет иметь место.

Наконец, пятая часть содержит основной результат данной работы, заключающийся в формулировании достаточных условий, при которых можно однозначно утверждать, какая из предложенных концепций поведения регионов социально предпочтительна.

В заключении подводятся итоги работы и перечисляются основные результаты.

2 Обзор литературы

В литературе существует ряд различных подходов к вопросу федерализма и ряд ответов на поставленные вопросы. В целом, однако, можно выделить два главных противоречащих подхода.

“Федералистская” точка зрения теоретически строго выражена различными версиями "модели Тибу"(

). В модели предполагаются мобильные налогоплательщики (которыми могут быть домохозяйства или фирмы), имеющие различные предпочтения относительно общественных благ. Региональные “неальтруистические” (“небеневолентные”) органы власти максимизируют прибыль или просто конкурируют за мобильных налогоплательщиков, путем производства полезных для них общественных благ, при этом расходы покрываются налогом типа паушального. Тогда, при достаточно большом числе регионов, их соревнование за налогоплательщиков должно привести к двум эффектам: 1) При достаточно естественных предположениях, в каждом регионе возникнут Парето-оптимальные налоги и объемы общественных благ. 2) Появится “дивергенция развития”, означающая неодинаковость регионов по всем параметрам. Каждый регион становится сообществом (“клубом единомышленников”) налогоплательщиков с одинаковой заинтересованностью в общественных благах. Эти идеи и результаты защищают федерализм как инструмент исправления информационной неполноценности федеральных правительств и выявления неоднородного спроса на локальные общественные блага.

Другая, “унитаристская” (антифедералистская) точка зрения, основанная на различных моделях “налогового соревнования” (развитых после работ

), приводит к противоположному выводу, защищая федеральное налогообложение или координацию регионов. Предполагаются беневолентные (т. е. максимизирующие благосостояние населения) правительства при наличии искажающих налогах на бизнес и финансировании общественных благ, полезных только для домохозяйств (таким образом, домохозяйства “доят” бизнес). Тогда оказывается, что равновесие Нэша среди правительств приносит меньшее благосостояние, чем налоговая координация (в этом случае равносильная социальному оптимуму). Именно, соревнование снижает налоги и общественные блага, причем это "недообложение" следует из опасения "учечки капитала".

Из этих моделей видно, что противоречивые выводы об эффективности следуют из различных комбинаций предположений. Сторонники "федералистского" подхода принимают гипотезы 1) полезных только для налогоплательщиков общественных благ, 2) неальтруистических (небеневолентных) правительств, 3) неискажающих налогов. Антифедералисты принимают противоположные предположения. Кроме того, допускаются различные предположения относительно мобильности налоговой базы. Попытка рассмотрения малоизученных "гибридных" ситуаций предпринята в предлагаемой работе.

В литературе имеются подобные интегрирующие подходы. В статье Эдвардса и Кина (Edwards and Keen

) сравниваются плюсы и минусы для благосостояния, порожденные налоговой конкуренцией. При этом общественные блага, финансируемые за счет налога на капитал, предполагаются полезными только для домохозяйств. Плюсы происходят от снижения ненужных расходов, вызванного дисциплиной, налагаемой налоговым соревнованием на неальтруистические правительства. Потери возникают вследствие эффекта внешних влияний — "утечки капитала", вызывающей недообложение. Наиболее важным достижением является разработка более-менее измеримой величины, "индекса", позволяющего разграничить ситуации, где польза от скоординированного поведения превышает вред. В ситуации одинаковых регионов и, следовательно, униформного налогообложения, небольшое налоговое увеличение полезно в том и только в том случае, если эластичность налоговой базы превышает предельную склонность тратить впустую налоговый доход.

3 Модель

Рассмотрим страну, состоящую из двух регионов, каждый из которых управляется региональными властями, обобщенно названными “губернатор”. Население страны состоит из домохозяйств и фирм. Фирмы платят налоги, которые идут в региональный бюджет и затем расходуются губернатором на поддержание общественных благ и собственное потребление. Таким образом, каждый губернатор выбирает тройку $(t_i, g_i, l_i) \in \mathbb{R}^3_+$ при некоторых ограничениях. Схемы налогообложения могут быть разными, поэтому величина t_i в зависимости от конкретной ситуации может интерпретироваться по-разному, в частности, она может быть адвалорным налогом, подушным и т. д. Нам важно, чтобы эта величина была ограниченной сверху, поэтому без ограничения общности будем считать, что $t_i \leqslant 1$ и интерпретировать ее как *налоговую ставку*. Величина g_i означает расходы губернатора на *общественные блага*, l_i — *расходы губернатора на необоснованное собственное потребление* т. е. ненужные региону расходы.

В стране имеется некоторый товар (обычно интерпретируемый как капитал), являющийся объектом рассматриваемого налогообложения. Этот товар предполагается мобильным между регионами. Регион характеризуется двумя функциями, связанными с этим товаром и его налогообложением.

Функция налогового сбора $T_i = T_i(t_1, t_2)$ обозначает количество налога, которое может быть собрано в i-м регионе. Заметим, что эта функция зависит от *всех* налоговых ставок, и, возможно, она имеет точку максимума (точку Лаффера) по “собственному” налогу t_i, в то же время возрастая по t_j, $j \neq i$. В частном случае адвалорного налога T_i может быть построена из некоторой *функции налоговой базы* $I\!B_i = I\!B_i(t)$ так что $T_i(t) = t_i I\!B_i(t)$. Ниже описываются другие модельные элементы и предположения.

Рассмотрим задачу оптимизации величины налоговой ставки t_i при фиксированном значении t_j, $j \neq i$:

$$V_i(t_i, t_j) \to \max_{t_i} \tag{1}$$

$$T_i(t) = T_i,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1.$$

(A1) *(1) Функции $T_i(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, строго вогнуты, возрастают по t_j, $j \neq i$, и $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} T_i(t) \geqslant 0$ при $(0,0) \leqslant t \leqslant (1,1)$.*

(2) Налоги производительны, т. е. $\forall\ t_j \in [0,1)$ $\exists\ t_i \in [0,1)$ такая, что $T_i(t_1, t_2) > 0$.

(3) Функции $T_i(\cdot)$ обладают следующим свойством: $\forall t_j \in [0,1]$ $\exists t_i \in [0,1)$: $T_i(t_i, t_j) > T_i(1, t_j)$.

Обсудим предположение A1. Производительность налогов гарантирует, что вне зависимости от величины налоговых ставок в других регионах, собираемость налогов в данном регионе не будет нулевой. Свойство (3) говорит о реакции бизнеса на установление максимальной налоговой ставки: фирмы уходят из региона или сокращают производство (уходят в "тень") при "запредельных" налогах ($t_i = 1$) так, что собираемость налогов сокращается.

Функция остаточного благосостояния налогоплательщиков $V_i = V_i(t_1, t_2)$ обозначает благосостояние фирм (являющихся единственными налогоплательщиками) после налогообложения. Она не включает полезность от общественных благ, финансируемых после сбора этих налогов. Данная функция в какой-то мере подобна чистой прибыли фирм (оставшейся после налогообложения), поэтому мы в дальнейшем будем считать ее измеренной в денежных единицах (рублях).

(A2) *Функции $V_i(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, строго вогнуты по t, убывают по t_i: $\frac{\partial}{\partial t_i} V_i(t) = \dot{V}_{ii}(t) < 0$, возрастают по t_j, $j \neq i$: $\frac{\partial}{\partial t_j} V_i(t) = \dot{V}_{ij} > 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} V_i(t) \geqslant 0$.*

Заметим, что обе функции зависят от *всех* налоговых ставок. В этом и проявляется эффект межрегиональной зависимости, так что регионы действительно конкурируют.

Рассмотрим цели губернатора. В нашей модели губернатор не является как полностью альтруистичным (*беневолентным*), так и заботящимся только о своих интересах. Мы предполагаем, что каждый губернатор преследует в своем поведении три цели: благосостояние фирм, домохозяйств и собственные интересы. Все три цели являются аддитивными составляющими функции, описывающей поведение губернатора:

$$U_i(t_i, t_j, g_i, l_i) := \beta_i V_i(t_i, t_j) + \gamma_i u_i(g_i) + \lambda_i w_i(l_i). \tag{2}$$

Здесь $u_i(g_i)$ обозначает полезность домохозяйств от потребления общественных благ в объеме g_i, а $w_i(l_i)$ — это удовлетворение губернатора от расходов на собственное потребление в объеме l_i. Так как выше предполагалось, что полезность фирм измеряется в денежных единицах, то из (2) следует, что удовлетворение как самого губернатора, так и домохозяйств измеряется в тех же денежных единицах. Таким образом, значение $U_i(t, g_i, l_i)$ – это оценка губернатора денежного выигрыша региона. Коэффициенты β_i, γ_i, λ_i означают некоторые веса, с которыми соответствующие интересы входят в целевую функцию губернатора.

(A3) *Функции $u_i(\cdot)$, $w_i(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируемы, неотрицательны, строго вогнуты и удовлетворяют условию Инады: $\dot{u}_i(0) = \infty$, $\dot{u}_i(\infty) = 0$, $\dot{w}_i(0) = \infty$, $\dot{w}_i(\infty) = 0$.*

Функцию $U_i(t, g_i, l_i)$ удобно рассматривать в нормированном по β_i виде, то есть измеренную в выгодах фирм, так что в дальнейшем всегда

$$U_i(t_i, t_j, g_i, l_i) = V_i(t_i, t_j) + \gamma_i u_i(g_i) + \lambda_i w_i(l_i).$$

Поясним значение понятия *беневолентность* (альтруистичность) в рассматриваемом случае. С точки зрения федерального законодателя, “наилучшими” весами целей являются такие, что интересы бизнеса и домохозяйств учитываются одинаково, а личные интересы губернатора не учитываются вообще. В нашем случае это означает, что *беневолентными* (“справедливыми”, соответствующими мнению “социального плановика” – федерального законодателя) весами являются $(\gamma_i, \lambda_i) = (1, 0)$. Отсутствием беневолентности (небеневолентностью) будет называться любая иная ситуация. Губернатор может преследовать, помимо региональных, свои собственные интересы, что отражается в функции в виде положительности коэффициента $\lambda_i > 0$. Он так же может неправильно распределять бюджет региона между деловыми и общественными интересами, что отражается в значении коэффициента γ_i. Любое его значение, отличное от единицы, свидетельствует о придании определенному слою населения большей значимости, чем социально необходимая. Если $\gamma_i < 1$, то это говорим об излишнем преследовании интересов бизнеса — *индустриальном лоббизме*. В случае $\gamma_i > 1$ имеет место чрезмерное преследование потребительских интересов (возможно, с целью заручиться поддержкой домохозяйств при переизбрании), т. е. *популизм*.

Рассмотрев различные варианты предпочтений губернаторов, перейдем к изучению возможных вариантов поведения регионов. Федеральное правительство (социальный плановик) может предоставить губернаторам возможность выбрать как минимум из двух вариантов поведения.

Первый заключается в выборе губернатором "своих" налогов самостоятельно, принимая остальные налоги как данные. Цель — максимизация *своей* целевой функции $U_i(t, g_i, l_i)$. В этом случае регионы будут конкурировать за налогоплательщиков, поскольку налоги, взимаемые с бизнеса, являются единственным источником доходной части регионального бюджета.

Второй вариант предполагает некоторую договоренность между регионами по поводу установления налогов с целью максимизации некоторой *общей* функции социального благосостояния, *отвечающей мнению губернаторов*, при общем для регионов бюджетном ограничении. Другими словами, в этом случае губернаторы кооперируются и проводят *единую* налоговую политику.

Ниже приводятся точные определения соответствующих концепций решения.

Определение 1 ***Равновесие с налоговой конкуренцией*** *есть равновесие Нэша* (t^E, g^E, l^E) *в игре регионов с функциями выигрыша губернаторов, совпадающими с их функциями полезности* $U_i(t, g_i, l_i)$.

Таким образом, в рамках равновесного подхода каждый из губернаторов решает задачу вида

$$U_i(t, g_i, l_i) \to \max_{t_i,\ g_i,\ l_i} \tag{3}$$

$$g_i + l_i = T_i\left(t\right),\ g_i \geqslant 0,\ l_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1.$$

Тройка (t^E, g^E, l^E), где $t^E = \left(t_1^E, t_2^E\right)$, $g^E = \left(g_1^E, g_2^E\right)$, $l^E = \left(l_1^E, l_2^E\right)$ является равновесием, если (t_i^E, g_i^E, l_i^E), являются решением задачи (3) при фиксированном значениях t_j.

В варианте *координации* регионов, имеется ввиду их совместное (скоординированное) поведение с целью максимизации некоторой общей функции выигрыша.

Определение 2 ***Решение координации*** *есть тройка* $\left(t^C, g^C, l^C\right)$*, решающая задачу*

$$U_1(t, g_1, l_1) + U_2(t, g_2, l_2) \to \max_{t,\ g,\ l} \tag{4}$$

$$g_1 + l_1 + g_2 + l_2 = T_1\left(t\right) + T_2\left(t\right),\ g_i \geqslant 0,\ l_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = 1, 2. \tag{5}$$

Вернемся далее к вопросу об определении социального оптимума. Подходы здесь могут быть различны. Наиболее естественным, на первый взгляд, представляется моделирование поведения социального плановика в терминах решения задачи координации с беневолентной целевой функцией, то есть как решение задачи

$$V_1(t_1, t_2) + u_1(g_1) + V_2(t_1, t_2) + u_2(g_2) \to \max_{t,\ g,\ l}$$

$$g_1 + l_1 + g_2 + l_2 = T_1\left(t\right) + T_2\left(t\right),\ g_i \geqslant 0,\ l_i \geqslant 0,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i = 1, 2.$$

При такой постановке социальный планировщик самостоятельно выбирает как налоги, так и объемы общественных расходов, т. е, другими словами, определяет обе части федерального бюджета: доходную составляющую (сбор налогов) и расходную (поддержание общественных благ). Конечно, на практике реализация такого подхода сталкивается с определенными трудностями. В частности, эффективный контроль за расходами губернаторов представляется проблематичным. Поэтому мы будем моделировать поведение федерального законодателя как выбор налогов с целью максимизации социального благосостояния при условии, что губернаторы впоследствии будут расходовать налоговые сборы в соответствии со своими, возможно неальтруистическими, интересами. В итоге приходим к следующему определению.

Определение 3 ***Социальный оптимум*** — *это решение следующей задачи*

$$V_1(t_1,t_2)+u_1(g_1^*(t_1,t_2))+V_2(t_1,t_2)+u_2(g_2^*(t_1,t_2))\to\max_{t_1,\ t_2} \tag{6}$$

при условии $0\leqslant t_1\leqslant 1$, $0\leqslant t_2\leqslant 1$, *где* $g_1^*(t_1,t_2)$ *и* $g_2^*(t_1,t_2)$ *являются решениями задач*

$$\gamma_i u_i(g_i)+\lambda_i w_i(l_i)\to\max_{g_i,\ l_i}$$

$$g_i+l_i=T_i\left(t\right),\ g_i\geqslant 0,\ l_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2.$$

Таким образом, социальный оптимум реализуется как решение задачи максимизации беневолентной целевой функции с учетом неальтруистических интересов губернаторов. Этот оптимум реализует равновесие по Штакельбергу, в котором социальный плановик является “лидером”, а губернаторы — “ведомыми”.

Введенное понятие социального оптимума понадобится нам для сравнения ситуации равновесия и координации с точки зрения общественного благосостояния. Именно, с решением задачи (6) сравниваются решение задачи (4) и равновесное решение (определяемое задачами типа (3)). Для дальнейшего использования положим

$$U_\Sigma^*\left(t_1,t_2\right)=V_1(t_1,t_2)+u_1(g_1^*(t_1,t_2))+V_2(t_1,t_2)+u_2(g_2^*(t_1,t_2)). \tag{7}$$

Это текущее значение функции общественного благосостояния при налоговых ставках (t_1,t_2).

Далее перейдем к техническому разделу работы, где будут изучены некоторые важные свойства поставленных выше задач с тем, чтобы использовать эти свойства для получения содержательных выводов по интересующим нас вопросам.

4 Декомпозиция задач и монотонность решений

В этом разделе изучаются некоторые свойства решения описанных выше задач. Затем, опираясь на эти свойства, будет показано, что при координации регионов налоги более высокие по сравнению с ситуацией конкурентного равновесия.

Рассмотрим задачу поиска конкурентного равновесия. Первое слагаемое целевой функции, $V_i(t)$, зависит только от налоговых ставок, второе — обозначенное как $G_i(g_i, l_i) = \gamma_i u_i(g_i) + \lambda_i w_i(l_i)$ — зависит только от переменных g_i и l_i, тем самым отражая пользу домохозяйств и губернаторов от налогообложения. Далее решение задачи разбивается на три этапа: задачу оптимизации величины налоговой ставки, задачу оптимизации количества налоговых сборов $T_i(t)$ и задачу оптимизации структуры общественных затрат. Данная декомпозиция основывается на естественном противоречии интересов различных субъектов экономики: деньги на реализацию общественных благ собираются в виде налогов с фирм, нисколько в налогах не заинтересованных. Рассмотрим эти три задачи подробнее, далее всюду $i = 1, 2$.

A) Оптимизация структуры общественных расходов при фиксированной сумме налоговых сборов T_i:

$$G_i(g_i, l_i) \to \max_{g_i,\ l_i}$$
$$g_i + l_i = T_i,\ g_i \geqslant 0,\ l_i \geqslant 0.$$

Решение каждой из этих задач (g_i^*, l_i^*) определяет некоторое зависящее от параметра T_i отображение $(g_i^*(T_i),\ l_i^*(T_i))$. Заметим, что, согласно предположению A3 (условию Инады), решение (g_i^*, l_i^*) – внутреннее для любого положительного параметра T_i. Положим $G_i^*(T_i) = G_i(g_i^*(T_i), l_i^*(T_i))$, тем самым однозначно определив отображение $G_i^*(T_i)$.

B) Оптимизация величины налоговой ставки t_i при фиксированном значении t_j, $j \neq i$:

$$V_i(t_i, t_j) \to \max_{t_i}$$
$$T_i(t) = T_i,\ 0 \leqslant t_i \leqslant 1.$$

Решение этой задачи определяет некоторое отображение от параметра T_i: $t_i^*(T_i)$. Это отображение полностью определено и однозначно. Положим $V_i^*(T_i) = V_i(t_i^*(T_i), t_j)$.

C) Оптимизация уровня налоговых сборов:

$$G_i^*(T_i) + V_i^*(T_i) \to \max_{T_i}$$

$$0 \leqslant T_i \leqslant \overline{T}.$$

Здесь $\overline{T}$ – максимальное число, удовлетворяющее неравенству $T_i(t) \leqslant \overline{T}$ $\forall t \in [0,1]^2$. Решение T_i^* этой задачи единственно при наших предположениях. В силу предположения A1, оно также является внутренней точкой области $[0, \overline{T}]$.

Далее рассмотрим собственно свойства равновесия с налоговой конкуренцией. Обозначим

$$T_i^{\max}(t_j) = \max_{t_i \in [0,1]} T_i(t).$$

Следующая лемма устанавливает монотонность решения задачи об оптимальной величине налоговой ставки t_i по параметру T_i.

Лемма 1 *Решение $t_i^*(T_i)$ задачи (B) монотонно по параметру T_i. Именно, на $[0, T_i^{\max}(t_j)]$ отображение $t_i^*(T_i)$ возрастает по параметру налоговых сборов T_i, дифференцируемо и $\frac{\partial}{\partial T_i} t_i^*(T_i) > 0$. На $[0, T_i^{\max}(t_j)]$ отображения $g_i^*(T_i)$ и $l_i^*(T_i)$ строго возрастают, дифференцируемы и $\frac{\partial}{\partial T_i} g_i^*(T_i) > 0$, $\frac{\partial}{\partial T_i} l_i^*(T_i) > 0$, $i = 1, 2$.*

Доказательство: см. Приложение. ■

Из леммы 1 следует, что при увеличении собираемости налогов T_i, в равновесии произойдет также увеличение затрат губернатора на общественные блага g_i и собственное потребление l_i.

В следующей лемме равновесие рассматривается как функция от параметров задачи (A), $\gamma_i > 0$ и $\lambda_i \geqslant 0$.

Лемма 2 *Параметры в точке равновесия с налоговой конкуренцией гладким образом зависят от величин γ_i и λ_i, причем налоговый доход T_i^* и налоговая ставка t_i^* монотонно возрастают при увеличении весовых коэффициентов γ_i и λ_i:*

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i} T_i^* > 0,\ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} T_i^* > 0,\ \frac{\partial}{\partial \gamma_i} t_i^* > 0,\ \frac{\partial}{\partial \lambda_i} t_i^* > 0.$$

Доказательство: см. Приложение. ■

В следующей лемме уровень налогов в равновесии сравнивается с уровнем налогов при координации.

Лемма 3 *При фиксированных $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ в решении задачи координации (4) $\left(t^C, g^C, l^C\right)$ ставки налогов t^C выше, чем в состоянии равновесия (t^E, g^E, l^E), т. е. $t^C \gg t^E$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу поиска решения координации (4). Из предположений A1, A2, A3 следует, что решение задачи будет внутренним. Выражая l_2 из условия (5), $l_2 = T_1(t) + T_2(t) - g_1 - l_1 - g_2$ и, подставляя в функцию $w_2(l_2)$, получаем задачу безусловного экстремума

$$V_1(t_1, t_2) + \gamma_1 u_1(g_1) + \lambda_1 w_1(l_1) + V_2(t_1, t_2) + \gamma_2 u_2(g_2) + \lambda_2 w_2(l_2(t, g, l_1)) \to \max_{t,\ g,\ l_1}.$$

Далее воспользуемся условиями первого порядка этой задачи во внутренней точке, которые в решении $\left(t^C, g^C, l^C\right)$ примут вид:

$$\dot{V}_{ii}\left(t^C\right) + \gamma_i \dot{u}_i\left(g_i^C\right) \dot{T}_{ii}\left(t^C\right) + \dot{V}_{ji}\left(t^C\right) + \gamma_j \dot{u}_j\left(g_j^C\right) \dot{T}_{ji}\left(t^C\right) = 0,$$

$$g_1^C + l_1^C + g_2^C + l_2^C = T_1\left(t^C\right) + T_2\left(t^C\right),$$

$$\gamma_i \dot{u}_i\left(g_i^C\right) - \lambda_i \dot{w}_i\left(l_i^C\right) = 0,$$

$i = 1,\ 2$. Далее, как нетрудно проверить, полученное таким образом состояние экономики $\left(t^C, g^C, l^C\right)$ совпадет с равновесием, если последнее рассматривать относительно параметров:

$$\gamma_i^E = \gamma_i + \frac{\dot{V}_{ji}\left(t^C\right) + \gamma_j \dot{u}_j\left(g_j^C\right) \dot{T}_{ji}\left(t^C\right)}{\dot{u}_i\left(g_i^C\right) \dot{T}_{ii}\left(t^C\right)}, \tag{8}$$

$$\lambda_i^E = \lambda_i + \frac{\left(\gamma_i^E - \gamma_i\right)\dot{u}_i\left(g_i^C\right)}{\dot{w}_i(l_i^C)}. \tag{9}$$

Действительно, условиями первого порядка для равновесия являются:

$$\dot{V}_{ii}\left(t^C\right) + \gamma_i^E \dot{u}_i\left(g_i^C\right)\dot{T}_{ii}\left(t^C\right) = 0,$$

$$g_i^C + l_i^C = T_i\left(t^C\right),$$

$$\gamma_i^E \dot{u}_i\left(g_i^C\right) - \lambda_i^E \dot{w}_i\left(l_i^C\right) = 0.$$

После подстановки γ_i^E и λ_i^E из (8) и (9) получаем решение координации.

Наконец, из (8) и (9), согласно нашим предположениям относительно знаков производных функций u_i, w_i, V_i и T, получаем $\gamma^E > \gamma$ и $\lambda^E > \lambda$. Однако поскольку в анализируемом случае рассматривается равновесие с параметрами γ_i и λ_i меньшими, чем γ_i^E и λ_i^E, то в силу Леммы 2 заключаем, что $t_i^E < t_i^C$. ■

5 Недообложение и налоговое стимулирование

В предыдущем разделе мы выявили необходимые свойства решений, которые понадобятся для доказательства основного результата работы. В данном разделе мы рассмотрим два важных вопроса, ответы на которые позволят предложить измеримые (более-менее) критерии, при использовании которых можно однозначно утверждать, какая из возможных альтернатив — конкуренция или координация — лучше с точки зрения общества. Именно, мы намерены прояснить вопрос о том, являются ли уровни налогообложения в равновесии и координации с общественной точки зрения “достаточными”, то есть, максимально ли при этих уровнях благосостояние общества? Если это не так, то некоторое налоговое увеличение или, напротив, уменьшение, будет оправданным. Как уже было отмечено выше, уровень налогов в равновесии и координации будет сравниваться с уровнем налогов, оптимальным с точки зрения социального плановика, т. е. входящим в решение задачи (6). Рассмотрим каждую из ситуаций в отдельности.

5.1 Недообложение в равновесии

Предположим, что в равновесии (t^E, g^E, l^E) происходит дифференциально-малое увеличение налога t_1 в первом регионе на величину dt_1 при условии неизменности второго налога, а расходы $(g^*(T(t)), l^*(T(t)))$ корректируются в соответствии с задачей оптимальной структуры общественных расходов. Мы намерены прояснить, при каких соотношениях модельных параметров реализуется рост общественного благосостояния. С этой целью подсчитаем частную производную целевой функции социального плановика (беневолентной функции благосостояния):

$$\frac{\partial}{\partial t_1} U_\Sigma = \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ V_1(t_1, t_2) + u_1(g_1^*(t_1, t_2)) + V_2(t_1, t_2) + u_2(g_2^*(t_1, t_2)) \right\} |_{t=t^E} =$$

$$= \dot{V}_{11}\left(t^E\right) + \dot{u}_1\left(g_1^E\right) \cdot \dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right) \cdot \dot{T}_{11}\left(t^E\right) + \dot{V}_{21}\left(t^E\right) + \dot{u}_2\left(g_2^E\right) \cdot \dot{g}_{2T}^*\left(T^E\right) \cdot \dot{T}_{21}\left(t^E\right).$$

Рост общественного благосостояния будет иметь место, если последнее выражение положительно. Рассмотрим далее условия первого порядка для равновесия. Имеем $\dot{V}_{11}\left(t^E\right)+\gamma_1\dot{u}_1\left(g_1^E\right)\dot{T}_{11}\left(t^E\right)=0$, откуда

$$\dot{V}_{11}\left(t^E\right)=-\gamma_1\dot{u}_1\left(g_1^E\right)\dot{T}_{11}\left(t^E\right),$$

и, поэтому, предыдущее выражение преобразуется к виду

$$[\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right)-\gamma_1]\dot{u}_1\left(g_1^E\right)\cdot\dot{T}_{11}\left(t^E\right)+\dot{V}_{21}\left(t^E\right)+\dot{u}_2\left(g_2^E\right)\cdot\dot{g}_{2T}^*\left(T^E\right)\cdot\dot{T}_{21}\left(t^E\right). \tag{10}$$

Нас интересует ситуация, в которой выражение (10) строго больше нуля. Поскольку $\dot{u}_1\left(g_1^E\right)\cdot\dot{T}_{11}\left(t^E\right)=-\dot{V}_{11}\left(t^E\right)/\gamma_1$, то это свойство будет иметь место, если

$$-\left(1-\frac{\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right)}{\gamma_1}\right)\cdot\dot{V}_{11}\left(t^E\right)<\dot{V}_{21}\left(t^E\right)+\dot{u}_2\left(g_2^E\right)\cdot\dot{g}_{2T}^*\left(T^E\right)\cdot\dot{T}_{21}\left(t^E\right).$$

Здесь, в силу предположения A2, имеем $-\dot{V}_{11}\left(t^E\right)>0$, что позволяет разделить на него последнее неравенство, получая

$$1-\frac{\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right)}{\gamma_1}<\frac{\dot{V}_{21}\left(t^E\right)+\dot{u}_2\left(g_2^E\right)\cdot\dot{g}_{2T}^*\left(T^E\right)\cdot\dot{T}_{21}\left(t^E\right)}{-\dot{V}_{11}\left(t^E\right)}. \tag{11}$$

Это и есть итоговое неравенство, при выполнении которого происходит недообложение налогами в первом регионе. Здесь величина $\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right)$ однозначно интерпретируется как *доля прироста регионального бюджета, идущая на общественные блага*. Последнее следует из задачи расходования (A):

$$\gamma_i u_i(g_i)+\lambda_i w_i(l_i)\to\max_{g_i,\ l_i}$$

$$g_i+l_i=T_i,\ \ g_i\geqslant 0,\ \ l_i\geqslant 0.$$

Здесь из предположения A3 (условия Инады) заключаем, что данная задача имеет внутреннее решение, для которого условиями первого порядка являются

$$\gamma_i\dot{u}_i(g_i^*)=\lambda_i\dot{w}_i(l_i^*),\quad g_i^*+l_i^*=T_i.$$

Повторяя далее рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве Леммы 2, получаем

$$g_i^*\left(T_i\right)+l_i^*\left(T_i\right)\equiv T_i.$$

Дифференцируя далее это тождество по T_i, находим $\dot{g}_i^*(T_i) + \dot{l}_i^*(T_i) = 1$. Из этого равенства, а также в силу Леммы 1, имеем $0 \leqslant \dot{g}_i^*(T_i) \leqslant 1$. При этом из постановки задачи следует, что $\dot{g}_i^*(T_i) = 1$ при $\lambda_i = 0$ и $\gamma_i > 0$, $\dot{g}_i^*(T_i) < 1$ при $\lambda_i > 0$ и $\gamma_i > 0$. Наконец, $\dot{g}_i^*(T_i) = 0$ при $\gamma_i = 0$ и любых λ_i.

Далее предложим интерпретацию формулы (11). Выражение слева назовем *индексом (мерой) беневолентности:*

$$B_1(\gamma, \lambda) = 1 - \frac{\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right)}{\gamma_1}.$$

Этот индекс показывает степень неальтруистичности губернатора в первом регионе. Действительно, если $\lambda_1 = 0$ и $\gamma_1 = 1$, то $\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right) = 1$ и $B_1(\gamma, \lambda) = 0$. В случае небеневолентности его значение может быть как меньше, так и больше нуля, но всегда меньше единицы в силу того, что $\dot{g}_i^*(T_i) \geqslant 0$. Если $\lambda_1 = 0$ и $\gamma_1 > 1$, то $\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right) = 1$ и $B_1(\gamma, \lambda) > 0$; если $\lambda_1 = 0$ и $\gamma_1 < 1$, то $\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right) = 1$ и $B_1(\gamma, \lambda) < 0$. Если $\lambda_1 > 0$, то $\dot{g}_{1T}^*\left(T^E\right) < 1$, и $B_1(\gamma, \lambda) > 0$ при $\gamma_1 > 1$. При $\gamma_1 < 1$ величина может быть любого знака.

Назовем величину в правой части неравенства (11) *индексом конкурентности*

$$R_1(\gamma, \lambda) = \frac{\dot{V}_{21}\left(t^E\right) + \dot{u}_2\left(g_2^E\right) \cdot \dot{g}_{2T}^*\left(T^E\right) \cdot \dot{T}_{21}\left(t^E\right)}{-\dot{V}_{11}\left(t^E\right)}.$$

Эта величина всегда положительна, так что неравенство (11) наверняка выполняется в случаях *беневолентности губернатора в первом регионе*, а также в случае *отсутствия собственного потребления и индустриальном лоббизме*.

Отметим, что этот индекс может быть эквивалентным образом переписан в виде

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t_1} U_2\left(t^E\right)}{-\frac{\partial}{\partial t_1} V_1\left(t^E\right)}. \tag{12}$$

В числителе этого выражения стоит величина, показывающая увеличение благосостояния потребителей во втором регионе в результате увеличения налоговой ставки в первом. В знаменателе — потери фирм первого региона. Поэтому данный индекс в некотором смысле является *мерой перелива* части фирм из первого региона, после увеличения налога, во второй. Он может быть как меньше, так и больше единицы. В первом случае — это случай низкой конкурентности, потребность в увеличении налогов может иметь место или нет в зависимости от значения индекса беневолентности. Действительно, если $B_1(\gamma, \lambda) \leqslant 0$ или $0 < B_1(\gamma, \lambda) < R_1(\gamma, \lambda)$, то увеличение налогов нужно стимулировать. Однако, если $B_1(\gamma, \lambda) \geqslant R_1(\gamma, \lambda)$, то этого делать не нужно. Во втором случае — это высокая конкурентность при $R_1(\gamma, \lambda) > 1$, эффект внешних влияний от увеличения налога преобладает, и нужно стимулировать налогообложение, причем всегда, вне зависимости от того, сколько популизма или любви к роскоши имеет место!

Полученные соотношения показывают, какие параметры необходимо измерить для того, чтобы сделать выводы относительно ситуации с налогообложением. Возможно, некоторые эксперты в состоянии хотя бы приближенно оценить величину $\dot{g}^*_{iT}$ — какая часть каждого дополнительно собранного в виде налогов рубля не потрачена бесплодно, а направлена на финансирование общественных благ. Кроме того, федеральный законодатель должен высказать свое мнение о распределении дополнительного бюджетного рубля между деловыми и общественными интересами, чтобы в дальнейшем сравнить это с тем, как регионы расходуют этот рубль. Для оценки индекса конкурентности $R_1(\gamma, \lambda)$ необходимо выяснить, каким образом могут быть оценены числитель и знаменатель этого выражения. Например, предельные потери фирм первого региона (знаменатель) могли бы быть измерены как потери в прибыли, то есть объемом (в стоимостном выражении, скажем, в рублях инвестиций) бизнес-проектов, аннулированных вследствие небольшого увеличения налогового давления в регионе, умноженным на их среднюю чистую прибыльность. Возможно, что это удастся измерить эконометрически, исходя из наблюдаемых значений эластичностей по налогам — в том числе и для оценки параметров, входящих в состав числителя дроби (12).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1 *Предположим, что в равновесии* (t^E, g^E, l^E) *для первого региона произошло дифференциально-малое увеличение налога на* dt_1 *и регионы скорректировали свои расходы* $(g^*(T(t)), l^*(T(t)))$ *в соответствии с этим изменением. Тогда общественное благосостояние увеличится, если* $B_1(\gamma, \lambda) <$

$R_1(\gamma,\lambda)$ и, соответственно, уменьшится, если $B_1(\gamma,\lambda) > R_1(\gamma,\lambda)$. Благосостояние не изменится, если $B_1(\gamma,\lambda) = R_1(\gamma,\lambda)$.

5.2 Недообложение при координации

Предположим, что в решении координации $\left(t^C, g^C, l^C\right)$ происходит дифференциально-малое увеличение налога t_1 в первом регионе на величину dt_1 при условии неизменности второго налога, а расходы $\left(g^*\left(T\left(t\right)\right), l^*\left(T\left(t\right)\right)\right)$ корректируются в соответствии с задачей (A) оптимальной структуры общественных расходов. Мы собираемся прояснить соотношения модельных параметров, при которых реализуется рост общественного благосостояния. С этой целью подсчитаем частную производную целевой функции социального планировщика (беневолентной функции благосостояния):

$$\frac{\partial}{\partial t_1}U_\Sigma = \frac{\partial}{\partial t_1}\left\{V_1(t_1,t_2)+u_1(g_1^*(t_1,t_2))+V_2(t_1,t_2)+u_2(g_2^*(t_1,t_2))\right\}|_{t=t^C} =$$

$$= \dot{V}_{11}\left(t^C\right)+\dot{u}_1\left(g_1^C\right)\cdot\dot{g}_{1T}^*\left(T^C\right)\cdot\dot{T}_{11}\left(t^C\right)+\dot{V}_{21}\left(t^C\right)+\dot{u}_2\left(g_2^C\right)\cdot\dot{g}_{2T}^*\left(T^C\right)\cdot\dot{T}_{21}\left(t^C\right). \quad (13)$$

Из условий первого порядка для задачи координации следует

$$\dot{V}_{11}\left(t\right)+\gamma_1\dot{u}_1\dot{T}_{11}+[\dot{V}_{21}\left(t\right)+\gamma_2\dot{u}_2\dot{T}_{21}] = 0, \quad (14)$$

$$\gamma_1\dot{u}_1 = \lambda_1\dot{w}_1.$$

Подставляя $\dot{V}_{11}\left(t\right)+\dot{V}_{21}\left(t\right)$ из (14) в (13) с последующим преобразованием, приводим (13) к виду

$$\left[\dot{g}_{1T}^*(T^C)-\gamma_1\right]\dot{u}_1\left(g_1^C\right)\cdot\dot{T}_{11}(t^C)+\left[\dot{g}_{2T}^*(T^C)-\gamma_2\right]\dot{u}_2\left(g_2^C\right)\cdot\dot{T}_{21}(t^C).$$

Нас интересует, когда это выражение положительно, т. е. когда верно

$$[\dot{g}_{1T}^*-\gamma_1]\dot{u}_1\left(g_1^C\right)\dot{T}_{11}(t^C)+[\dot{g}_{2T}^*(T^C)-\gamma_2]\dot{u}_2\left(g_2^C\right)\dot{T}_{21}(t^C) > 0. \quad (15)$$

После элементарных преобразований последнее приводится к виду

$$1-\frac{\dot{g}_{1T}^*}{\gamma_1} < \frac{[\dot{g}_{2T}^*-\gamma_2]\dot{u}_2\left(g_2^C\right)\dot{T}_{21}(t^C)}{\gamma_1\dot{u}_1\left(g_1^C\right)\dot{T}_{11}(t^C)}.$$

Обозначим, как и в предыдущем разделе,

$$B_1(\gamma,\lambda) = 1 - \frac{\dot g^*_{1T}}{\gamma_1},$$

— это уже рассмотренный нами индекс беневолентности. Для правой части неравенства положим

$$R^C_1(\gamma,\lambda) = \frac{[\dot g^*_{2T} - \gamma_2]\dot u_2\left(g^C_2\right)\dot T_{21}(t^C)}{\gamma_1 \dot u_1\left(g^C_1\right)\dot T_{11}(t^C)}.$$

Это новый индекс, и он нуждается в интерпретации.

Введем обозначение $u^\gamma_i = \gamma_i u_i\left(g_i\left(T\left(t\right)\right)\right)$. Теперь величину $R^C_1(\gamma,\lambda)$ можно переписать в виде

$$-\frac{\dot g^*_{1T}}{\dot g^*_{2T}} \cdot B_2(\gamma,\lambda) \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial t_1}u^\gamma_2}{\frac{\partial}{\partial t_1}u^\gamma_1}, \tag{16}$$

где $B_2(\gamma,\lambda) = 1 - \dot g^*_{2T}/\gamma_2$ — индекс беневолентности губернатора во втором регионе. Первый множитель, сравниваемый с единицей, показывает, в каком регионе губернатор более готов расходовать дополнительный рубль бюджета на потребителей, поскольку величина $\dot g^*_{iT}$ есть увеличение затрат на общественные блага при возрастании величины налоговых сборов.

Второй множитель в (16) в интерпретации не нуждается, он, как и в предыдущем разделе, свидетельствует о неальтруистичности губернатора во втором регионе. Если $B_2(\gamma,\lambda) \neq 0$, то губернатор второго региона не является беневолентным, так как в этом случае либо $\gamma_2 \neq 1$, либо $\lambda_2 \neq 0$. Это подробно обсуждалось выше.

Третий множитель $\frac{\partial}{\partial t_1}u^\gamma_2/\frac{\partial}{\partial t_1}u^\gamma_1$ показывает, в каком регионе вследствие увеличения налоговой ставки и последующего увеличения расходов на общественные блага благосостояние домохозяйств, по мнению губернаторов, увеличилось больше. Этот показатель также следует сравнивать с единицей. Возможно, значение этого показателя может быть получено некоторыми исследователями на основании экспертных оценок.

Если все величины, входящие в состав $B_1(\gamma,\lambda)$ и $R^C_1(\gamma,\lambda)$, измерены, то становится возможным сделать вывод о том, имеет ли место недообложение налогами в первом регионе при координации. Заметим, что запись неравенства

(15) в виде соотношения между индексами $B_1(\gamma, \lambda)$ и $R_1^C(\gamma, \lambda)$ была необходима для осуществления попыток *практического измерения* ситуации и постановки соответствующего диагноза. Для теоретического анализа достаточно неравенства (15), что и делается в дальнейшем.

Поскольку $\dot{u}_i\left(g_i^C\right)\dot{T}_{i1}(t^C) > 0$, $i = 1, 2$, то вопрос о положительности выражения

$$(\dot{g}_{1T}^* - \gamma_1)\,\dot{u}_1\dot{T}_{11} + (\dot{g}_{2T}^* - \gamma_2)\,\dot{u}_2\dot{T}_{21} \tag{17}$$

решается однозначно в случае, если $\dot{g}_{1T}^* > \gamma_1$ и $\dot{g}_{2T}^* > \gamma_2$. Последнее наверняка имеет место, если в каждом регионе губернатор слабо заинтересован в собственном потреблении (λ_i достаточно близко к нулю и, следовательно, $\dot{g}_{iT}^* \approx 1$), но излишне заботится об интересах бизнесменов (имеем $\gamma_1 < 1$, $i = 1, 2$). Другими словами, в случае *индустриального лоббизма* и *отсутствия собственных интересов*, в координации происходит *недообложение налогами бизнеса*.

Из выражения (17), в частности, следует, что координация совпадает с социальным оптимумом в случае полностью альтруистичного губернатора, так как в этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и значит $\dot{g}_{1T}^* = \gamma_1 = 1$ и $\dot{g}_{2T}^* = \gamma_2 = 1$.

6 Конкуренция или координация?

В предыдущем разделе были определены условия, позволяющие разграничить ситуации, в которых уровень налогообложения в равновесии или координации является большим или меньшим, чем общественно оптимальный. Далее мы намерены прояснить главный вопрос — при каких условиях и когда общественное благосостояние выше: в равновесии или при координации? Сравнение разных концепций решения основывается на сравнении значений функции (7):

$$U_\Sigma^*(t_1, t_2) = V_1(t_1, t_2) + u_1(g_1^*(t_1, t_2)) + V_2(t_1, t_2) + u_2(g_2^*(t_1, t_2)),$$

которая вогнута в силу Леммы 1,[1] в точках равновесия (t^E, g^E, l^E) и координации $\left(t^C, g^C, l^C\right)$. В силу Леммы 3 в координации налоги всегда выше, чем в равновесии, поэтому если в координации налоги меньше, чем в социальном оптимуме (т. е. в координации имеет место недообложение), то в равновесии налоги еще меньше. Следовательно, если в координации благосостояние меньше, чем в оптимуме (а это следует из вогнутости беневоленой целевой функции), то в равновесии благосостояние будет еще меньше! Диаметрально противоположная ситуация имеет место в случае, когда наблюдается переобложение в равновесии: здесь в координации будет еще большее переобложение, поэтому благостояние в равновесии будет выше.

Приведенные рассуждения формализуются в следующей теореме.

Теорема 2 *При налоговом* ***недообложении*** *в решении координации, координация является социально предпочтительной.*

При налоговом ***переобложении*** *для налоговой конкуренции, конкуренция является социально предпочтительной.*

Доказательство На пространстве переменных (t_1, t_2) рассмотрим беневолентную целевую функцию (7), построенную на основе решения задачи оптимизации общественных расходов (A). Для сравнения координации $\left(t^C, g^C, l^C\right)$ с

[1] В силу Леммы 1, значение целевой функции $\gamma_i u_i(g_i) + \lambda_i w_i(l_i)$ в задаче оптимизации общественных расходов, рассматриваемое как функция параметра T_i, т. е. вычисленное в оптимуме: $\gamma_i u_i(g_i^*(T_i)) + \lambda_i w_i(l_i^*(T_i))$, является вогнутой функцией (по параметру T_i).

равновесием (t^E, g^E, l^E) проанализируем значения этой функции в соответствующих точках, т. е. проверим истинность соотношения $U^*_\Sigma\left(t^C\right) > U^*_\Sigma\left(t^E\right)$. В силу Леммы 1 функция U^*_Σ монотонна и вогнута, откуда следует, что множество

$$U^{++}\left(t^C\right) = \left\{t \in [0,1]^2 \ \mid U^*_\Sigma(t) > U^*_\Sigma\left(t^C\right)\right\}$$

непусто и выпукло. Так как точка t^C не принадлежит этому множеству, то по теореме отделимости существует вектор h такой, что $ht > ht^C\ \forall t \in U^{++}\left(t^C\right)$. Покажем, что в силу недообложения налогами в координации, имеет место $h \gg 0$. Действительно, заметим, что в случае недообложения из свойств функции $U^*_\Sigma(t)$ (вогнутость) следует, что $t^C + \delta e_i \in U^{++}\left(t^C\right)$ для каждого достаточно малого $\delta > 0$, где e_i — единичный орт. Но тогда $h(t^C + \delta e_i) > h(t^C) \Rightarrow h_i \delta > 0$, откуда $h_i > 0$, $i = 1, 2$. Далее, так как в равновесии, согласно Лемме 3, налоги меньше, то $ht^C > ht^E$. Отсюда получаем, что $ht > ht^E\ \forall t \in U^{++}\left(t^C\right)$ и, значит, равновесие строго отделено от точек, не худших координации, т. е. $U^*_\Sigma\left(t^E\right) < U^*_\Sigma\left(t^C\right) \in cl\left(U^{++}\left(t^C\right)\right)$[2].

В случае переобложения при конкуренции можно провести аналогичные рассуждения и получить, что $pt^C < pt^E$ для некоторого строго положительного вектора p, отделяющего точку t^E от строго "лучших" точек. Теорема доказана.

■

Таким образом, удается выявить два класса ситуаций, в которых выбор "конкуренция или координация" решается однозначно. Однако остается область, в которой невозможно дать столь же простой ответ на поставленный вопрос. Это случай, когда одновременно имеют место "недообложение" в равновесии и "переобложение" при координации. В этой области ответ пока не получен и ее изучение станет предметом дальнейших исследований.

---

[2] $cl\left(U^{++}\left(t^C\right)\right)$ — замыкание множества $U^{++}\left(t^C\right)$.

7 Заключение

В работе исследовалась модель налогового соревнования между двумя регионами при различных предположениях относительно поведения региональных властей, предложенная в незавершенной работе С. Г. Коковина и Е. В. Желободько. Модель применима к различным вариантам налогооблагаемой базы, мобильности ресурсов и схем налогообложения. Для анализа была разработана совокупность соответствующих понятий: концепции равновесия с налоговой конкуренцией и скоординированного решения, концепция равновесия по Штакельбергу, индексы конкурентности бизнеса и беневолентности региональных властей, критерии “недообложения” и “переобложения”.

При сравнении конкурентного равновесия с решением координации был использован разработанный критерий “недообложения”. Критерий заключается в сравнении значений некоторых измеримых индексов “конкурентности” и “беневолентности”, что позволяет диагностировать ситуации “недообложения” и “переобложения”. Далее было показано, что:

1. В ситуациях индустриального лоббизма, т. е. излишнего преследования региональными властями интересов бизнеса, и отсутствия личного потребления у региональной власти, координация является общественно предпочтительной. Этот эффект достигается в случае “недообложения” при координации;

2. Напротив, в ситуации высокого популизма, т. е. чрезмерного преследования целей домохозяйств, или значительного собственного интереса у региональной власти, конкурентное равновесие более предпочтительно при низкой конкурентности (что влечет за собой “переобложение” в равновесии);

3. В более сложных ситуациях с “недообложением” в равновесии и “переобложением” при координации, однозначного ответа не имеется.

Таким образом, работа представляет собой первый шаг на пути анализа “гибридной” модели налоговой конкуренции и создает основу для дальнейшего ее исследования.

Приложение

Доказательство Леммы 1. Тот факт, что отображения $t_i^*(T_i)$, $g_i^*(T_i)$, $l_i^*(T_i)$ полностью определены и однозначны, следует из предположений A1, A2, A3 (вогнутость целевых функций и выпуклость допустимых наборов). Другие свойства этих отображений следуют из применения к задачам (A) и (B) следующей леммы о выпуклой оптимизации:

Лемма 4 *Предположим, что Лагранжиан задачи*

$$V(x) \to \max_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad T(x) \geqslant \tau \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

это $L(x,\lambda) = V(x) + \lambda(T(x) - \tau)$, *и функции* $V(\cdot)$, $T(\cdot)$ *строго вогнуты и дважды непрерывно дифференцируемы по* x. *Пусть в точке оптимума (седловой паре)* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *матрица Гессе для Лагранжиана* $\ddot{L}_x\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = [\partial^2 L(x,\lambda)/\partial x^2](\bar{x}, \bar{\lambda})$ *имеет неотрицательные внедиагональные элементы. Тогда положительность градиента* $\nabla T(\bar{x})$ *влечет положительную чувствительность к изменению* τ *вектора решения* $\bar{x}(\tau)$, *т. е.* $\dot{x} = \partial \bar{x}(\tau)/\partial \tau \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Доказательство. Рассмотрим условия первого порядка:

$$\nabla V(\bar{x}) + \bar{\lambda} \nabla T(\bar{x}) = 0$$

$$T(\bar{x}) = \tau$$

По теореме о неявной функции в окрестности точки $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$ существуют дифференцируемые функции $\bar{x}(\tau)$, $\bar{\lambda}(\tau)$, производные которых могут быть найдены из системы уравнений, полученной в результате дифференцирования условий первого порядка по τ (иначе, сравнительной статики решения $\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$ по τ):

$$\nabla V(\bar{x}(\tau)) + \bar{\lambda}(\tau) \cdot \nabla T(\bar{x}(\tau)) \equiv 0, \qquad T(\bar{x}(\tau)) \equiv \tau \tag{19}$$

Для нахождения производных воспользуемся формулой дифференцирования суперпозиции. Предположим, имеется дважды непрерывно дифференцируемая сложная функция скалярного аргумента τ, $u(x(\tau)) = f(g_1(\tau), ..., g_n(\tau))$. Обозначая $\dot{g}_\tau := (\dot{g}_1(\tau), ..., \dot{g}_n(\tau))^\top$, $\ddot{g}_\tau := (\ddot{g}_1(\tau), ..., \ddot{g}_n(\tau))^\top$, $\nabla f := (\dot{f}_1, ..., \dot{f}_n)^\top$,

$$H_f := \begin{bmatrix} \ddot{f}_{11} & \cdots & \ddot{f}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{f}_{n1} & \cdots & \ddot{f}_{nn} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

имеем $\ddot{u}_\tau = [\nabla f]^\top \cdot \ddot{g}_\tau + [\dot{g}_\tau]^\top \cdot H_f \cdot [\dot{g}_\tau]$. Пользуясь этим фактом, в результате дифференцирования системы (19) получаем:

$$\dot{x}^T H_V \dot{x} + (\nabla V)^\top \ddot{x} + \dot{\lambda} (\nabla T)^\top \dot{x} + \lambda \dot{x}^\top H_T \dot{x} + \lambda (\nabla T)^\top \ddot{x} = 0 \tag{21}$$

$$(\nabla T)^\top \dot{x} = 1, \tag{22}$$

где $\dot{x} = (\dot{x}_1(\tau), ..., \dot{x}_n(\tau))^\top$, $\ddot{x} = (\ddot{x}_1(\tau), ..., \ddot{x}_n(\tau))^\top$, $\nabla V = \left(\dot{V}_{x_1}, ..., \dot{V}_{x_n}\right)^\top$,$\nabla T = \left(\dot{T}_{x_1}, ..., \dot{T}_{x_n}\right)^\top$,

$$H_V = \begin{bmatrix} \ddot{V}_{11} & \cdots & \ddot{V}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{V}_{n1} & \cdots & \ddot{V}_{nn} \end{bmatrix}, \quad H_T = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{11} & \cdots & \ddot{T}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddot{T}_{n1} & \cdots & \ddot{T}_{nn} \end{bmatrix}.$$

После преобразования (члены, содержащие $\ddot{x}$, уничтожаются), подстановки (22) в (21) и используя $H_V + \lambda H_T = \ddot{L}_x \left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$, получаем

$$\dot{x}^T \ddot{L}_x \dot{x} = -\dot{\lambda}.^3$$

Используя (22), после умножения слева на ∇T, отсюда имеем

$$\ddot{L}_x \dot{x} = -\dot{\lambda} \nabla T$$

или, в силу $\dot{\lambda} = -(\nabla T)^\top \ \ddot{L}_x^{-1} (\nabla T)$ (легко выводится), имеем

$$\ddot{L}_x \dot{x} = \frac{\nabla T}{(\nabla T)^\top \ddot{L}_x^{-1} (\nabla T)}.$$

Отсюда видно, что, исходя из предположений, выражение справа отрицательно, а матрица $\ddot{L}_x$ содержит отрицательные элементы на главной диагонали

[3] Тем самым доказываем, что $\dot{\lambda} = -\dot{x}^T \ddot{L}_x \dot{x} > 0$. Отсюда следует еще одно полезное замечание. По теореме об огибающей для задачи (18) получам $\partial L (x(\tau)) / \partial \tau = \partial V (x(\tau)) / \partial \tau = -\lambda(\tau)$, откуда непосредственно следует $\partial^2 V (x(\tau)) / \partial \tau^2 = -\dot{\lambda}(\tau) = \dot{x}^T \ddot{L}_x \dot{x} < 0$, т. е. $V(x(.))$ вогнутая функция по τ.

и неотрицательные вне ее. Если же умножить всё на -1, то справа будет положительный вектор, а слева матрица с положительными элементами на главной диагонали и неположительными вне ее. Поэтому по теореме 6.1 из Никайдо [**?**] получим, что решение системы положительно: $\dot{x} = \partial x(\tau)/\partial\tau \geqslant 0$.

Применимость Леммы 4 к задачам (A) и (B) в любой точке решения очевидна из наших предположений относительно функций V, T, u, w. Например, условия на матрицу Гессе следуют из предположения A1. Положительность градиента $\nabla T_i(t)$ также очевидна: $\frac{\partial}{\partial t_j} T_i(t) > 0$ по предположению A1, а тот факт, что $\frac{\partial}{\partial t_i} T_i(t) > 0$ следует из того, что решение задачи задачи (B) лежит левее точки Лаффера функции $T_i(t)$ по налогу t_i, т. е. $\frac{\partial}{\partial t_i} T_i(t_i^*(T_i), t_j) > 0 \; \forall T_i < T_i^{\max}(t_j)$, $\forall t_j \in [0,1]$. Последнее справедливо с силу предположения A2: $\frac{\partial}{\partial t_i} V_i(t) < 0$. ■

Доказательство Леммы 2. Из условий первого порядка задачи (C) с учетом того, что решение T_i^* внутреннее, получаем:

$$\dot{G}_i(T_i^*) + \dot{V}_i(T_i^*) = 0. \tag{23}$$

Дифференцируя $G_i(T_i)$ в точке T_i^*, получаем: $\dot{G}_i(T_i^*) = \gamma_i \dot{u}_i(g_i(T_i^*))\, \dot{g}_i(T_i^*) + \lambda_i \dot{w}_i(l_i(T_i^*))\, \dot{l}_i(T_i^*)$. Из условий первого порядка задачи (A) имеем

$$\lambda_i \dot{w}_i = \gamma_i \dot{u}_i. \tag{24}$$

Дифференцируя равенство $g_i(T_i^*) + l_i(T_i^*) = T_i^*$ по T_i, получаем $\dot{g}_i(T_i^*) + \dot{l}_i(T_i^*) = 1$. Подставляя полученные соотношения в (23), имеем

$$\gamma_i \dot{u}_i(g_i(T_i^*)) + \dot{V}_i(T_i^*) = 0.$$

Производная этого выражения по T_i^* равна $\gamma_i \ddot{u}_i \dot{g}_i + \ddot{V}_i$, и она отрицательна согласно нашим предположениям и Лемме (1): $\ddot{u}_i < 0$, $\ddot{V}_i < 0$, $\dot{g}_i > 0$. Поэтому в окрестности точки T_i^* существует дифференцируемая функция $T_i^*(\gamma_i)$ такая что

$$\gamma_i \dot{u}_i(g_i(T_i^*(\gamma_i))) + \dot{V}_i(T_i^*(\gamma_i)) \equiv 0. \tag{25}$$

Производную функции $T_i^*(\gamma_i)$ по γ_i можно найти, продифференцировав (25) по γ_i:

$$\dot{u}_i + \gamma_i \ddot{u}_i \dot{g}_i \dot{T}_i^* + \ddot{V}_i \dot{T}_i^*(\gamma_i) = 0,$$

откуда

$$\dot{T}_i^*\left(\gamma_i\right) = -\frac{\dot{u}_i}{\gamma_i \ddot{u}_i \dot{g}_i + \ddot{V}_{ii}} > 0.$$

Неравенство справа также следует из предположений и Леммы 1. Далее, заметим, что в силу Леммы 1, t_i возрастает с увеличением T_i^*. Наконец, чтобы завершить доказательство леммы, заметим, что из уравнения (24) следует, что аналогичные рассуждения можно осуществить и при анализе увеличения коэффициента λ_i. ■