Децентрализованная модель Рамсея

Filler

16 февраля 2004 г.

Аннотация

Модель Рамсея является естественным обобщением модели Солоу-Свена, хотя была опубликована почти на 30 лет раньше. В отличие от модели Солоу, в модели Рамсея норма сбережения определяется эндогенно рациональными домохозяйствами и фирмами, взаимодействующими на конкурентных рынках. Точнее говоря, в модели рассматриваются бесконечно живущие домохозяйства, выбирающие потребление и сбережение с целью максимизации благосостояния своего "клана" при наличии межвременного бюджетного ограничения, и фирмы, максимизирующие свою прибыль.

1 Домохозяйства

1.1 Модель

Домохозяйства в модели обеспечивают фирм рабочей силой в обмен на з/п, получают процентные платежи по своим активам, приобретают товары для потребления и сберегают путем накопления дополнительных активов. Каждое домохозяйство состоит по крайней мере из одного взрослого и его детей. Взрослые учитывают в своих действиях интересы наследников, как живущих ныне так и тех, кому еще предстоит родиться. Это предположение отражается в модели в виде функции полезности, определенной на бесконечном временном интервале. Т. е, хотя жизнь каждого члена семьи конечна, сама семья существует бесконечно долго. Вследствие рождаемости и смертности, мы предполагаем темп роста населения постоянным и экзогенно заданным:

$$L(t) = e^{nt}.$$

Если $C(t)$ — совокупное потребление в момент t, то $c(t) := C(t)/L(t)$ — подушевое потребление.

Каждое домохозяйство стремится максимизировать свою совокупную полезность U:

$$U := \int_0^\infty u\left[c\left(t\right)\right] \cdot e^{nt} \cdot e^{-\rho t} dt. \tag{1}$$

т. е. взвешенную сумму будущих “потоков полезности”, причем $u'\left(\cdot\right) > 0$ и $u''\left(\cdot\right) < 0$. Вогнутость выражает стремление домохозяйств к сглаживанию потребления, т. е. они предпочитают относительно однородное потребление такому, где $c\left(t\right)$ высоко в одни периоды и низко в другие. Предполагаются также выполненными условия Инады: $u'\left(0\right) = \infty$ и $u'\left(\infty\right) = 0$.

Множитель $e^{-\rho t}$ отражает норму межвременных предпочтений, причем $\rho > 0$, что говорит о том, что будущая полезность ценится меньше текущей (собственная полезность ценится выше, чем полезность потомков). Предполагается, что $\rho > n$, т. е. U ограничена, если $c\left(t\right)$ постоянно.

Домохозяйства владеют активами в форме требований на капитал или займов. Отрицательные займы означают долги. Экономика закрытая, внешней торговли нет. Домохозяйства могут занимать друг у друга, но в целом в равновесии чистые займы будут равны нулю. Поскольку обе формы активов равносильны как способы хранения ценностей, они имеют одинаковую реальную ставку процента, $r\left(t\right)$. Обозначим через $a\left(t\right)$ чистые подушевые активы домохозяйства, измеренные в единицах потребления, через $w\left(t\right)$ — ставку з/п.

Предполагается, что каждый взрослый неэластично предлагает 1 единицу труда в каждый момент времени, так что заработанный доход на душу равен $w\left(t\right)$. Нежелательной безработицы в модели нет. Совокупный доход на душу равен $w\left(t\right) + r\left(t\right) \cdot a\left(t\right)$, последнее слагаемое может быть и отрицательно.

Бюджетное ограничение домохозяйства есть

$$\dot{a} = w + ra - c - na \tag{2}$$

(активы на душу падают с ростом населения, отсюда слагаемое na).

Рынок займов в модели накладывает ограничение на сумму заимствования, так что текущая стоимость активов должна быть асимптотически неотрицательной:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left\{ a\left(t\right) \cdot \exp\left[-\int_0^t \left[r\left(\xi\right) - n\right] d\xi \right] \right\} \geqslant 0. \tag{3}$$

Условие означает, что в долгосрочном периоде подушевой долг (при $a\left(t\right) < 0$) не может расти с темпом $r\left(t\right) - n$, т. е. долг не может расти с темпом $r\left(t\right)$.

Задача домохозяйства заключается в максимизации полезности (1) при ограничениях (2), (3) и начальном условии на активы $a\left(0\right)$. Ограничение $c\left(t\right) \geqslant 0$ благодаря условиям Инады связывающим не является.

1.2 Условия первого порядка

Необходимые (и в данном случае достаточные) условия первого порядка задачи домохозяйства дает принцип максимума Понтрягина. Функция Понтрягина задачи домохозяйства есть:

$$H = u(c)\, e^{-(\rho-n)t} + \nu\left[w + (r-n)\, a - c\right], \tag{4}$$

где сопряженная переменная ν трактуется как сегодняшняя теневая цена будущего дохода, т. е. ν означает ценность дохода в момент t, выраженную в единицах начального момента. Принцип максимума состоит в том, что:

1. Функция Понтрягина достигает максимума по c, в данном случае это равносильно тому, что

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nu = u'(c)\, e^{-(\rho-n)t}. \tag{5}$$

2. Справедливо сопряженное уравнение:

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial H}{\partial a} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\nu} = -(r-n)\,\nu. \tag{6}$$

3. Выполнено условие трансверсальности

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left[\nu(t) \cdot a(t)\right] = 0. \tag{7}$$

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА. Дифференцируя (5) по времени и подставляя в (6), получаем основное условие для выбора потребления во времени:

$$r = \rho - \frac{du'/dt}{u'} = \rho - \left[\frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)}\right] \cdot \left(\frac{\dot{c}}{c}\right). \tag{8}$$

Уравнение (8) говорит о том, что домохозяйства выбирают потребление с тем, чтобы уравнять норму процента r с нормой временны́х предпочтений ρ, сложенной с нормой снижения предельной полезности потребления. Следовательно, справа стоит что-то вроде “процента по потреблению”. Итак, оптимизирующие агенты в равновесии равнодушны между потреблением и сбережением в инфинитезимальных изменениях. Заметим также, что если $r = \rho$, то нет никаких стимулов сберегать и поэтому $c(t) = const$. Выражение $(u''(c) \cdot c)/u'(c)$ есть эластичность предельной полезности.

УСЛОВИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ. Оно говорит о том, что оптимизирующему агенту будет невыгодно оставлять ценные активы неиспользованными, по сути, терять их; вместо этого следовало бы проесть их в какой-то из моментов времени, увеличив тем самым свою полезность.

Проинтегрируем (6) от нуля до t:

$$\nu(t) = \nu(0) \cdot \exp\left\{-\int_0^t [r(\xi) - n]\, d\xi\right\},$$

где $\nu(0) = u'[c(0)] > 0$, потому что $c(0)$ конечно. Подставив этот результат в условие трансверсальности (7), получим

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\left\{a(t) \cdot \exp\left[-\int_0^t [r(\xi) - n]\, d\xi\right]\right\} = 0. \tag{9}$$

Итак, в равновесии условие “No Ponzi game” будет выполнено автоматически. Действительно, чтобы занимать бесконечно, нужно найти тех, кто будет давать в долг. Но из условия трансверсальности следует, что таковых не найдется.

Далее будет использоваться специфический вид функции полезности, именно, функция с *постоянной эластичностью межвременного замещения* (CIES):

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}, \tag{10}$$

где $\theta > 0$, здесь эластичность предельной полезности равна $-\theta$, а эластичность замещения $1/\theta$. С учетом этой спецификации, уравнение (8) примет вид

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \tag{11}$$

В этом случае решение о потреблении определяется соотношением r и ρ, а более низкая готовность к межвременному замещению (бо́льшее значение θ) определяет меньшую чувствительность $\dot{c}/c$ к этому соотношению.

2 Фирмы

Фирмы производят товары, выплачивают з/п и рентные платежи на капитал. Каждая фирма обладает технологией

$$Y = F(K, L, t),$$

где K — капитал, выраженный в единицах товара, L — труд, выраженный в человеко-часах в год, t отражает технологический прогресс. $F(\cdot)$ — неоклассическая функция по K и L. Далее предполагается, что

$$F(K, L, t) = F(K, \hat{L}),$$

где $\hat{L} := L \cdot A(t)$ — уровень эффективных трудозатрат, $A(t)$ — уровень технологии, растущий с постоянным темпом $x \geqslant 0$. Обозначая $\hat{y} := Y/\hat{L}$, $\hat{k} := K/\hat{L}$ и $f(\hat{k}) := F(\hat{k}, 1)$, получаем выражения для предельных продуктов факторов:

$$\partial Y/\partial K = f'(\hat{k}),$$

$$\partial Y/\partial L = \left[f(\hat{k}) - \hat{k} \cdot f'(\hat{k})\right] e^{xt}.$$

Из условий Инады следует, что $f'(0) = \infty$ и $f'(\infty) = 0$.

Предполагается, что капиталом владеют домохозяйства, а капитал и потребляемый товар полностью взаимозаменяемы. Прибыль фирмы запишется в виде

$$\pi = F(K, \hat{L}) - (r + \delta) K - wL =$$

$$= \hat{L}\left(f(\hat{k}) - (r + \delta) \cdot \hat{k} - we^{-xt}\right). \qquad (12)$$

Условие максимума прибыли для конкурентной фирмы есть

$$f'(\hat{k}) = r + \delta. \qquad (13)$$

В оптимуме прибыль должна быть равна нулю, тогда $\partial Y/\partial L = w$. Таким образом, модель не определяет индивидуальное предложение труда, зато определяет отношение факторов к затратам, а также совокупный выпуск.

3 Равновесие

Поскольку в пределе каждое домохозяйство заканчивает с нулевым долгом, то $a = k$, так как капиталом в закрытой экономике могут владеть только ее агенты. Обозначая $k := K/L$, $\hat{c} := C/\hat{L}$, так что $\hat{k} = ke^{-xt}$, и используя (13), преобразуем (2):

$$\dot{\hat{k}} = f(\hat{k}) - \hat{c} - (x + n + \delta) \cdot \hat{k}, \qquad (14)$$

$\hat{k}(0)$ — задано. Множитель $(x + n)$ отражает рост $\hat{L}$ в общем изменении $\hat{k}$.

Полученное уравнение — основное в определении динамики $\hat{k}$ и, следовательно, $\hat{y}(\hat{k})$. В отличие от модели Солоу, для решения уравнения (14) неизвестна зависимость $\hat{c}(\hat{k})$. Однако, используя (13), выражение (11) и учитывая, что $\hat{c} = ce^{-xt}$, получаем:

$$\frac{\dot{\hat{c}}}{\hat{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - x = \frac{1}{\theta}\left[f'(\hat{k}) - \delta - \rho - \theta x\right]. \qquad (15)$$

Это уравнение, совместно с уравнением (14), а также начальным условием $\hat{k}(0)$ *и условием трансверсальности, определяет траектории* $\hat{c}$ *и* $\hat{k}$. Можно переписать условие (9) в терминах $\hat{k}$:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\left\{\hat{k}\cdot\exp\left[-\int\limits_0^t\left[f'(\hat{k})-\delta-x-n\right]d\xi\right]\right\}=0. \qquad (16)$$

Забегая вперед и зная, что $\hat{k}$ асимптотически стремится к своему стационарному состоянию $\hat{k}^*$, можно отметить, что условие трансверсальности требует, чтобы $f(\hat{k}^*)-\delta$, стационарная норма процента, превышала $x+n$, стационарный темп роста капитала K.

4 Альтернативный подход

Социальный планировщик в *централизованном* варианте модели Рамсея решает задачу максимизации функции полезности репрезентативного потребителя (1) при ограничении (14), начальном условии $\hat{k}(0)$ и ограничениях неотрицательности $c\geqslant 0$, $\hat{k}\geqslant 0$. Условия первого порядка этой задачи совпадают с (15) и (16). Это означает, что децентрализованная равновесная траектория в модели Рамсея является оптимальной траекторией в централизованной модели Рамсея, а значит, Парето-оптимальной.

5 Стационарное состояние

Стационарное состояние экономики, по определению, такое, что темпы роста $\hat{c}$ и $\hat{k}$ равны нулю. Можно найти его, приравняв нулю правые части в (14) и (15):

$$f'(\hat{k}^*)=\delta+\rho+\theta x, \qquad (17)$$

$$\hat{c}^*=f(\hat{k}^*)-(x+n+\delta)\cdot\hat{k}^*. \qquad (18)$$

Поскольку в стационарном состоянии $\hat{k}=const$, то условие трансверсальности равносильно тому, что норма процента, $r^*=f'(\hat{k}^*)-\delta$, превышает стационарный темп роста капитала $x+n$. Используя (17), получаем

$$\rho>n+(1-\theta)x. \qquad (19)$$

Как параметры модели влияют на стационарное состояние?

1. При увеличении готовности сберегать (уменьшение ρ или θ), кривая $\dot{\hat{c}}=0$ сдвигается вправо, поэтому $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$ увеличиваются;

2. Улучшение технологии или уменьшение нормы амортизации δ сдвигает кривую $\dot{\hat{k}} = 0$ вверх, а кривую $\dot{\hat{c}} = 0$ вправо; результат тот же;

3. Увеличение x сдвигает кривую $\dot{\hat{k}} = 0$ вниз, а $\dot{\hat{c}} = 0$ влево, тем самым уменьшая $\hat{c}^*$, $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$ (несмотря на падение $\hat{c}^*$, полезность возрастает, потому что теперь c растет еще быстрее, чем $\hat{c}$);

4. При постоянном ρ, изменение n не влияет на $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$, а если ρ растет вместе с n, то $\hat{k}^*$ и $\hat{y}^*$ снижаются. Рост n также вызывает снижение $\hat{c}^*$.

6 Переходная динамика

6.1 Фазовая диаграмма

Модель Рамсея более всего интересна своей способностью предсказывать поведение темпов роста и других переменных вдоль переходного пути, начиная с начального уровня $\hat{k}(0)$, и до стационарного уровня $\hat{k}^*$. Уравнения (14), (15) и (16) определяют путь $\hat{k}$ и $\hat{c}$ для заданного уровня $\hat{k}(0)$.

Система имеет "седловой путь" (*saddle path*). После визуального изучения рисунка (Приложение 1) очевидно, что экономика может придти в стационарное состояние, если она начнет свое развитие в двух из четырех квадрантов, на которые плоскость $(\hat{k}, \hat{c})$ делят два уравнения.[1]

Предположим, например, что $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$. Если при этом потребление есть $\hat{c}_0$, то экономика придет в стационарное состояние $(\hat{k}^*, \hat{c}^*)$ прямо по седловому пути. Если первоначальное потребление больше $\hat{c}_0$, то первоначальная норма накопления слишком мала, чтобы экономика оставалась на седловом пути. Траектория рано или поздно пересечет кривую $\dot{\hat{k}} = 0$. После пересечения $\hat{c}$ продолжит расти, а $\hat{k}$ — падать, и через конечное время $\hat{k}$ достигнет нуля. Поскольку $f(0) = 0$, то $\hat{c}$ также моментально упадет до нуля. Поскольку такое поведение потребления нарушает условие (15), подобные траектории (где $\hat{c}(0) > \hat{c}_0$) не являются равновесными. Если первоначальное потребление ниже $\hat{c}_0$, то норма накопления слишком высока, чтобы остаться на седловом пути, и экономика вскоре пересечет кривую $\dot{\hat{c}} = 0$. После пересечения, $\hat{c}$ начнет падать, а $\hat{k}$ продолжит расти. Экономика придет в точку, в которой кривая $\dot{\hat{k}} = 0$ пересечет

[1] Это также может быть проверено путем линеаризации системы диффереициальных уравнений (14)-(16) вокруг стационарного состояния. При этом определитель характеристической матрицы будет отрицательным, а значит, собственные значения — разных знаков, что и говорит о наличии "седла".

ось $\hat{c} = 0$. При этом нарушится условие трансверсальности ($f'(\hat{k}) - \delta < x + n$). Это означает, что домохозяйства излишне много сберегают: можно увеличить полезность, потребив больше.

6.2 Форма седлового пути

СП представляет из себя возрастающую кривую, проходящую через начало координат и точку стационарного состояния (Приложение 2).

Например, какое влияние на форму СП оказывает параметр θ? Пусть экономика стартует из $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, так что $\hat{c}$ растет. Высокое θ говорит о том, что домохозяйства желают иметь достаточно гладкое потребление, поэтому они захотят заменить будущее потребление текущим. Поскольку при этом норма накопления будет низкой, переходный период займет много времени.

Если θ низко, домохозяйства предпочтут отложить потребление в ответ на высокие нормы прибыли. Высокие уровни инвестирования гарантируют, что переходный период будет относительно быстрым, и чем ближе $\hat{k}$ будет к $\hat{k}^*$, тем резче будет расти потребление. Из рисунка также понятно, что линейными аппроксимациями в окрестности стационарного состояния эту динамику не выделить.

Можно показать, что для случая технологии Кобба-Дугласа ($\hat{y} = A\hat{k}^{\alpha}$) отношение $\hat{c}/\hat{k}$ растет, постоянно или снижается при переходном периоде от $\hat{k}(0) < \hat{k}^*$, в зависимости от того, является ли параметр θ меньшим, равным или бо́льшим, чем доля капитала α. Следовательно, СП является выпуклым, линейным или вогнутым в зависимости от того, является ли θ меньшим, равным или большим, чем α. Если $\theta = \alpha$, то уравнение СП есть

$$\hat{c} = \frac{\delta + \rho}{\theta - (\delta + n)} \cdot \hat{k}.$$

6.3 Поведение нормы сбережения

Норма сбережения равна $1 - \hat{c}/f(\hat{k})$. В отличие от модели Солоу, здесь норма сбережения может изменяться по сложному пути с участками роста и падения.

Причина в отсутствии явного преобладания одного из двух эффектов — замещения и дохода. С одной стороны: $\hat{k} \uparrow \implies f'(\hat{k}) = r \downarrow \implies$ стимул сберегать уменьшается $\implies s \downarrow$. С другой стороны, при низких $\hat{k}$ подушевой доход ($f(\hat{k})$) также гораздо ниже своего перманентного (долгосрочного) уровня. Поскольку домохозяйства хотят сглаживать потребление, они станут потреблять много по отношению к доходу, покуда они бедны, поэтому при низких $\hat{k}$ норма сбережения также будет низкой. С ростом $\hat{k}$ зазор между текущим и перманентным доходом будет все меньше, поэтому $\hat{c}/f(\hat{k})$ будет снижаться и s расти. В общем случае неочевидно, какой из эффектов будет преобладать.

Все упрощается для производственной функции Кобба-Дугласа. Стационарный уровень нормы сбережения есть

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\delta + \rho + \theta x}.$$

Из условия трансверсальности (19) следует, что $s^* < \alpha$. Если $s^* = 1/\theta$, то $s = 1/\theta$ на протяжении всего переходного периода. Если $s^* > 1/\theta$ ($<$), то $s > 1/\theta$ ($<$) и s растет (убывает). Скажем, при высоком значении θ (т. е. при низком желании к межвременному замещению) весьма вероятно, что во время переходного периода s будет расти (Приложение 3).

Важным отличием от модели Солоу даже в том случае, когда $s = const$, является тот факт, что в модели Рамсея s не может быть выбрана произвольно. В отличии от модели Солоу, динамическая неэффективность в модели Рамсея невозможна.

6.4 Траектории капитала и выпуска

С ростом $\hat{k}$ происходит снижение нормы прибыли r с ее начального уровня $f'[\hat{k}(0)] - \delta$ до стационарного уровня $\rho + \theta x$. Уравнение (15) подразумевает, что темп роста подушевого потребления, $\gamma_c := \dot{c}/c$, монотонно снижается. Тем самым, чем меньше $\hat{k}(0)$ и, следовательно, $\hat{y}(0)$, тем больше начальное значение γ_c.